

Formulaire de trigonométrie

Soit $(a, b, \theta) \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}_t = \left\{ \theta \in \mathbb{R}, \theta \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \right\}$ et $\mathcal{D}_c = \{ \theta \in \mathbb{R}, \theta \not\equiv 0 [\pi] \}$.

Définitions

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}, \quad \boxed{\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}, \quad \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \text{ avec } \theta \in \mathcal{D}_t, \quad \cotan(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \text{ avec } \theta \in \mathcal{D}_c.$$

Zéros

$$\boxed{\cos(\theta) = 0 \iff \theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]}, \quad \boxed{\sin(\theta) = 0 \iff \theta \equiv 0 [\pi]}, \quad \tan(\theta) = 0 \iff \theta \equiv 0 [\pi], \quad \cotan(\theta) = 0 \iff \theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi].$$

Parité

$$\boxed{\cos(-\theta) = \cos(\theta)}, \quad \boxed{\sin(-\theta) = -\sin(\theta)}, \quad \tan(-\theta) = -\tan(\theta), \theta \in \mathcal{D}_t, \quad \cotan(-\theta) = -\cotan(\theta), \theta \in \mathcal{D}_c.$$

Transformations affines

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)}, \quad \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta).$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cotan(\theta) \text{ avec } \theta \in \mathcal{D}_c, \quad \cotan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan(\theta) \text{ avec } \theta \in \mathcal{D}_t.$$

$$\boxed{\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)}, \quad \boxed{\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)}, \quad \cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta), \quad \sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta).$$

$$\boxed{\tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)} \text{ avec } \theta \in \mathcal{D}_t, \quad \cotan(\theta + \pi) = \cotan(\theta) \text{ avec } \theta \in \mathcal{D}_c.$$

Addition

$$\boxed{\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}, \quad \boxed{\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}.$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b), \quad \sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a).$$

$$\boxed{\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}} \text{ avec } a, b, a + b \in \mathcal{D}_t \quad \tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)} \text{ avec } a, b, a + b \in \mathcal{D}_t$$

$$\boxed{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1}$$

$$\boxed{\tan'(\theta) = 1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}} \text{ avec } \theta \in \mathcal{D}_t,$$

$$\cotan'(\theta) = -1 - \cotan^2(\theta) = -\frac{1}{\sin^2(\theta)} \text{ avec } \theta \in \mathcal{D}_c.$$

Factorisation

$$e^{ia} + e^{ib} = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}},$$

$$e^{ia} - e^{ib} = 2i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

$$\cos(a) - \cos(b) = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

$$\sin(a) - \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

$$a \cos(\theta) + b \sin(\theta) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta + \varphi) \text{ où } \varphi \text{ est un argument de } a - ib.$$

Équations trigonométriques

$$\boxed{\cos(a) = \cos(b) \iff a \equiv \pm b \ [2\pi]},$$

$$\boxed{\sin(a) = \sin(b) \iff a \equiv b \ [2\pi] \text{ ou } a \equiv \pi - b \ [2\pi]}.$$

$$\tan(a) = \tan(b) \iff a \equiv b \ [\pi],$$

$$\cotan(a) = \cotan(b) \iff a \equiv b \ [\pi].$$

Linéarisation

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}, \quad \sin(a) \sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}, \quad \sin(a) \cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}.$$

$$\boxed{\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}}$$

$$\boxed{\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}}$$

$$\boxed{\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)}$$

$$\cos^3(\theta) = \frac{3 \cos(\theta) + \cos(3\theta)}{4},$$

$$\sin^3(\theta) = \frac{3 \sin(\theta) - \sin(3\theta)}{4}.$$

Moivre

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

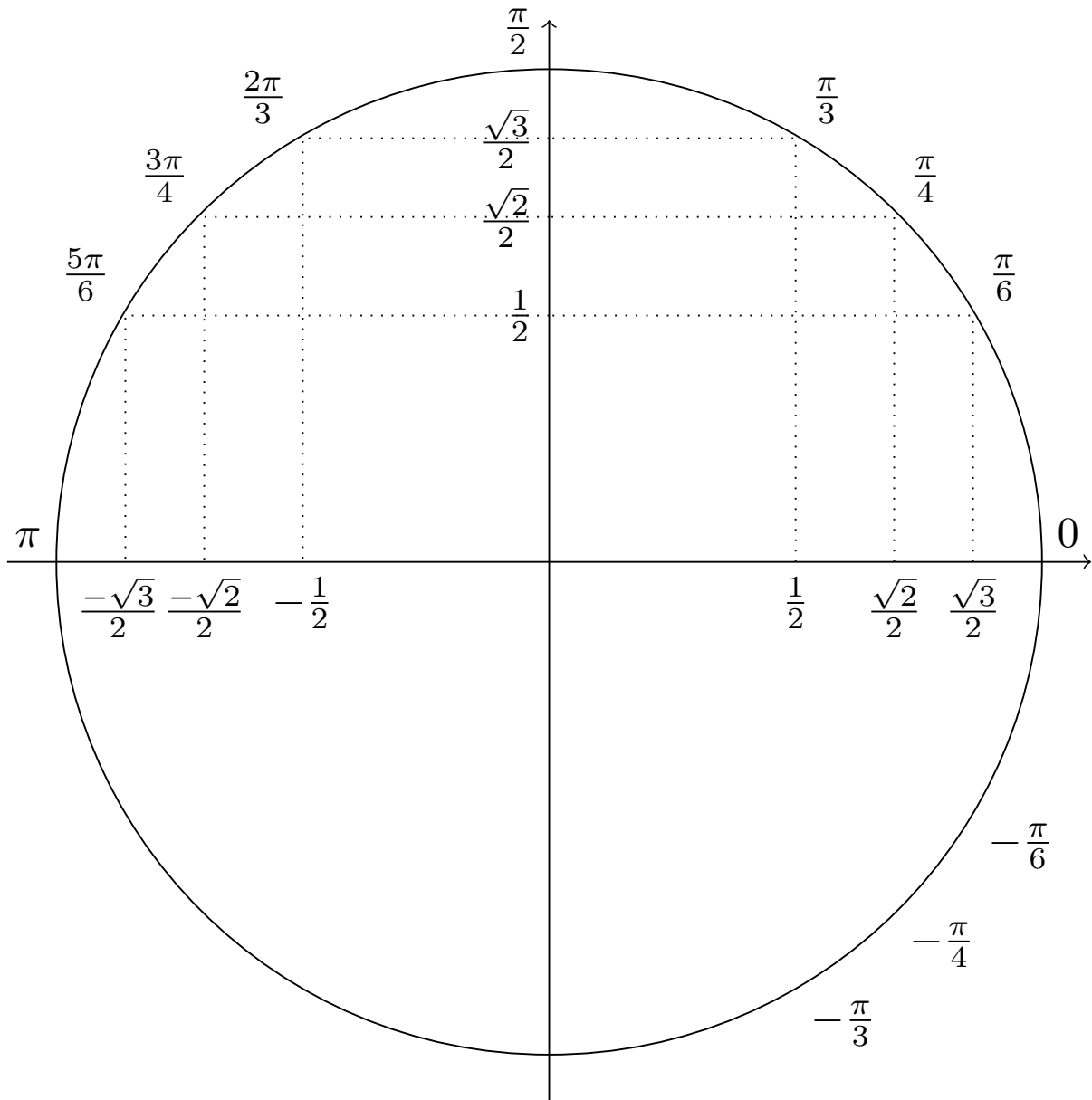
La famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} T_0 = 1, T_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \end{cases}$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

Paramétrisations

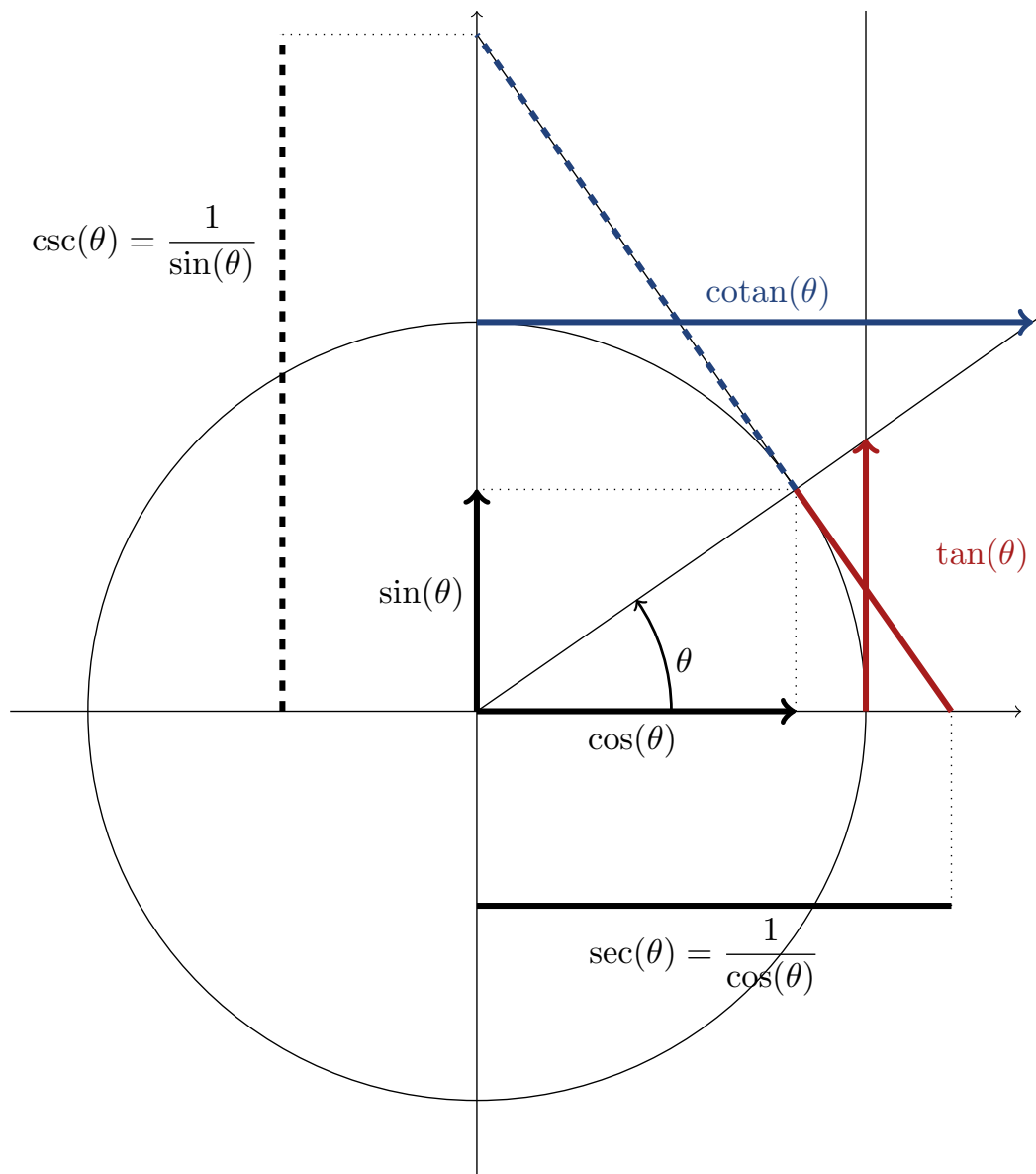
- Du cercle unité : $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ pour $\theta \in]-\pi, \pi]$.
 - Du demi-cercle (fermé) unité supérieur : $(x, \sqrt{1-x^2})$ pour $x \in [-1, 1]$.
-

Valeurs usuelles



θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	•	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Illustration



On remarquera le lien entre « co » et la symétrie par rapport à la droite $(0, e^{i\theta})$.