Chapitre 2. Équations

Table des matières

I. Prolégomènes

a) Forme algébrique et conjugué

On admet l'existence d'un ensemble contenant $\mathbb{R}$, muni d'une « addition » et d'une « multiplication » distributive sur l'addition étendant les opérations définies sur $\mathbb{R}$, dans lequel l'équation $x^2 = -1$ (d'inconnue x) possède une solution notée i.

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Le plus petit ensemble vérifiant ces propriétés est noté $\mathbb{C}$ et on admettra que $\mathbb{C} = \{a + ib,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Définition 2.1 : Nombre complexe

On dit que $\mathbb{C}$ est l'ensemble des **nombres complexes**.

Proposition 2.2 : Forme algébrique

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un **unique** couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$.

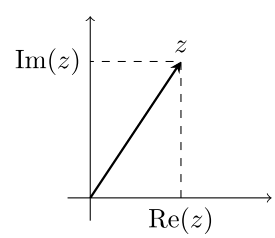
On dit que $a + ib$ est la **forme algébrique** de z, a sa **partie réelle** notée **Re**(z), b sa **partie imaginaire** notée **Im**(z).

Démonstration : Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a + ib = c + id$: $a - c = i(d - b)$ et si $d \neq b$ alors $i = \frac{a-c}{d-b} \in \mathbb{R}$ et il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = -1$. Absurde !

Remarque :

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$.
2. On dit qu'un complexe z est **imaginaire pur** s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $z = ib$ (autrement dit si $\mathrm{Re}(z) = 0$).

   Exemple : i et 0 sont des imaginaires purs.
3. $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) = 0\}$ et $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) = 0\}$.
4. Un complexe z peut être représenté par un vecteur du plan, connaissant sa partie réelle et sa partie imaginaire.



Attention 2.3

Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tel que $a + ib = c + id$ avec $a \neq c$ et $b \neq d$.

Démonstration : Considérer par exemple $(a, b, c, d) = (i, 0, 0, 2)$.

En pratique 2.4

Soit $z = a + ib$ et $s = c + id$ deux nombres complexes sous forme algébrique.

1. $z + s = (a + c) + i(b + d)$.
2. $\boxed{zs = (ac - db) + i(ad + bc)}$.

Démonstration : 1. Exercice. 2. En classe.

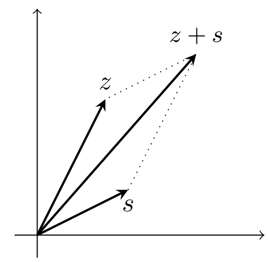
Proposition 2.5 :

Les fonctions $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$-linéaires.

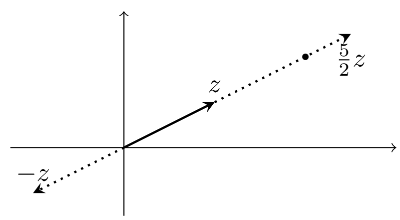
1. $\forall (z, s) \in \mathbb{C}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{Re}(z + \lambda s) = \mathrm{Re}(z) + \lambda \mathrm{Re}(s)$.
2. $\forall (z, s) \in \mathbb{C}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{Im}(z + \lambda s) = \mathrm{Im}(z) + \lambda \mathrm{Im}(s)$.

Remarque : En particulier pour tout $s, z \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\mathrm{Re}(z+s) = \mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(s)$ et $\mathrm{Im}(z+s) = \mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(s)$:

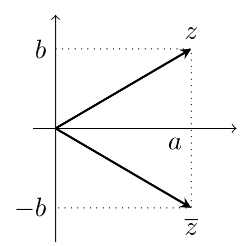


2. $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Im}(z)$:



Définition 2.6 : Conjugué

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ sous forme algébrique.
Le **conjugué** de z est le nombre complexe $\boxed{\overline{z} = a - ib}$.



Remarque :

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)$.
2. La conjugaison est involutive : $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{\overline{z}} = z$.

Proposition 2.7 :

La conjugaison est $\mathbb{R}$-linéaire : $\forall (z, s) \in \mathbb{C}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \overline{z + \lambda s} = \overline{z} + \lambda \overline{s}$.

Proposition 2.8

La conjugaison est un morphisme multiplicatif : $\forall (z, s) \in \mathbb{C}^2,\ \overline{zs} = \overline{z}\ \overline{s}$.

Remarque :

1. Pour tout $z, s \in \mathbb{C}$ avec $s \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{s}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{s}}$.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Attention 2.9

Pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on peut seulement affirmer que $\overline{a + ib} = \overline{a} - i\overline{b}$.

Démonstration : $\overline{i + ii} = -1 - i \neq 1 + i = i - ii$.

Proposition 2.10 :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\boxed{z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)}$ et $\boxed{z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)}$.

En pratique 2.11

Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. $z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0 \iff \overline{z} = z$.
2. $z \in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(z) = 0 \iff \overline{z} = -z$.

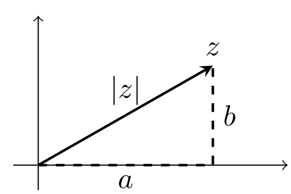
Exemple : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(3 - i\pi)^n + (3 + i\pi)^n \in \mathbb{R}$.

---

b) Module

Définition 2.12 : Module

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ sous forme algébrique.
Le **module** de z est le réel positif $\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$.



Remarque : Le module étend à $\mathbb{C}$ la fonction valeur absolue.

En pratique 2.13

Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $z = 0 \iff |z| = 0$.

Proposition 2.14 :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$.

Proposition 2.15

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$.

Démonstration : On a $a^2 \leqslant |z|^2$ et on conclut par croissante de la racine carrée.

Théorème 2.16 : Fondamental du module au carré

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\boxed{|z|^2 = z\overline{z}}$.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\boxed{\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}}$.

Exemple : $\dfrac{1}{1+i} = \dots$

En pratique 2.17

Montrer que pour tout $x, z \in \mathbb{C}$, $\boxed{(x-z)(x-\overline{z}) = x^2 - 2\mathrm{Re}(z)x + |z|^2}$.

Exemple : pour tout $x \in \mathbb{C}$, $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2 - 2x + 2$.

Proposition 2.18

Le module est un morphisme multiplicatif : $\forall (z,s) \in \mathbb{C}^2,\ |zs| = |z||s|$.

Démonstration : Passer par le carré.

> Remarque :
>
> 1. Pour tout $z, s \in \mathbb{C}$ avec $s \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{s}\right| = \dfrac{|z|}{|s|}$.
> 2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$.
> 3. $\mathbb{C}$ est intègre : $\forall (z,s) \in \mathbb{C}^2, zs = 0 \iff z = 0$ ou $s = 0$.

Ex 2.19

Montrer de manière élégante que : $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ (a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$.

Remarque : on en déduit en particulier que l'ensemble $\Sigma = \{n \in \mathbb{N},\ \exists (a,b) \in \mathbb{N}^2, n = a^2 + b^2\}$ est stable par produit.

Par exemple $34 = 3^2 + 5^2$ et $53 = 2^2 + 7^2$ donc $1802 = 34 \times 53 = \dots$

Théorème 2.20 : Inégalité triangulaire

Soit $(z,s) \in \mathbb{C}^2$.

1. $\boxed{|z+s| \leqslant |z| + |s|}$,
2. $|z+s| = |z| + |s|$ si, et seulement si, $s = 0$ ou ($s \neq 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z = \lambda s$).

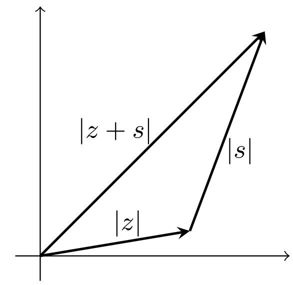
Démonstration : On a $(|z|+|s|)^2 - |z+s|^2 = 2(|z\overline{s}| - \mathrm{Re}(z\overline{s})) \geqslant 0$.

- $\Longrightarrow$: Pour $s \neq 0$, en notant $t = z\overline{s} = a + ib$, si $|t| = \mathrm{Re}(t)$ alors $b = 0$ et $a \in \mathbb{R}^+$ puis $z = \frac{a}{|s|^2}s$.

Remarque :

1. Pour tout $(z, s) \in \mathbb{C}^2$, $|z - s| \leqslant |z| + |s|$.
2. Pour tout $(z, s) \in \mathbb{C}^2$, $||z| - |s|| \leqslant |z + s|$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$|z_1 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n|$$



c) Forme trigonométrique et cercle unité

On suppose connues les fonctions trigonométriques cos et sin ainsi que leurs propriétés élémentaires qui seront démontrées ultérieurement.

Définition 2.21 : Formule d'Euler

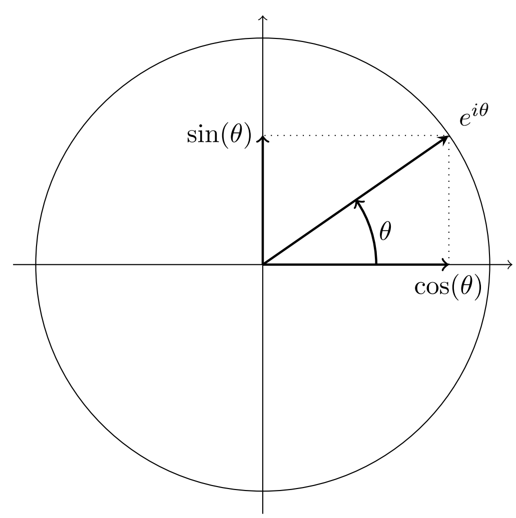
Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on pose $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Remarque : On retiendra que :

1. $\boxed{e^{i\frac{\pi}{2}} = i}$,
2. **Identité d'Euler** : $\boxed{e^{i\pi} = -1}$,
3. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $e^{2ik\pi} = 1$.
4. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$ et $\boxed{\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$.

En pratique 2.22

1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ et $|e^{i\theta}| = 1$.
2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $e^{i(\theta + 2k\pi)} = e^{i\theta}$.



Théorème 2.23

Pour tout $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, $\boxed{e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}}$ et $\boxed{\frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = e^{i(\theta-\varphi)}}$.

Démonstration : Des formules $\cos(\theta + \varphi)$ et $\sin(\theta + \varphi)$.

Remarque : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ et plus généralement pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

En pratique 2.24

Pour tout $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$: $\boxed{e^{i\theta} = e^{i\varphi} \iff \theta \equiv \varphi \ \ [2\pi]}$.

Démonstration : • $\underline{\Longrightarrow}$: Soit $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ tel que $e^{i\theta} = e^{i\varphi}$.

On a alors $e^{i(\theta-\varphi)} = 1$ puis en prenant la partie réelle $\cos(\theta - \varphi) = 1$ donc $\theta - \varphi \equiv 0 \ \ [2\pi]$ ie $\theta \equiv \varphi \ \ [2\pi]$.

Remarque : Pour $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ on rappelle que : $\theta \equiv \varphi \ \ [2\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \varphi + 2k\pi$.

Théorème 2.25 : Cercle unité

Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z| = 1 \iff \exists \theta \in]-\pi, \pi], z = e^{i\theta}$.

Démonstration : • $\underline{\Longrightarrow}$: $z = a + ib$.

On a $|a| \leqslant |z| = 1$ or cos est continue, $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$ donc par TVI il existe $\varphi \in [0, \pi]$ tel que $a = \cos(\varphi)$.

On a $b^2 = 1 - a^2 = \sin^2(\varphi)$ donc $|b| = \sin(\varphi)$. Si $b \geqslant 0$ on pose $\theta = \varphi$, sinon $\theta = -\varphi$.

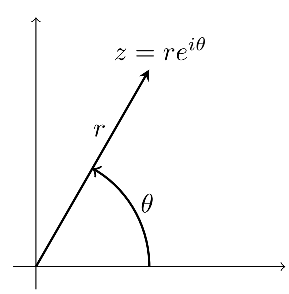
Définition 2.26

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ appelé **cerclé unité**.

Remarque : $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$.

En pratique 2.27 :

1. Pour tout $z, s \in \mathbb{U}$, $zs \in \mathbb{U}$.
2. Pour tout $z \in \mathbb{U}$, $\boxed{\dfrac{1}{z} = \overline{z} \in \mathbb{U}}$.



Définition 2.28 : Forme trigonométrique

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et un **unique** $r \in [0, +\infty[$ tels que $z = re^{i\theta}$.
On dit $re^{i\theta}$ est une **forme trigonométrique** de z et que θ est un **argument** de z.

Remarque : Si $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ est sous forme trigonométrique alors $r = |z|$.

Démonstration : Si $r = 0$, on prend $r = 0$; sinon $r = |z|$ et $\frac{z}{r} \in \mathbb{U}$ donc s'écrit sous la forme $e^{i\theta}$.

En pratique 2.29

1. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ sous forme algébrique.

   Une forme trigonométrique de z est $re^{i\theta}$ où $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et où $\theta \in \mathbb{R}$ est solution de $\cos(\theta) = \dfrac{a}{r}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{b}{r}$.

   Lorsque $a > 0$, un argument de z est l'unique solution de l'équation $\tan(x) = \dfrac{b}{a}$ d'inconnue $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

2. Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ sous forme trigonométrique.

   On a $\mathrm{Re}(z) = r\cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}(z) = r\sin(\theta)$.

Démonstration : $\tan(x) = \frac{b}{a}$ admet une unique solution $\boldsymbol{x}_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par TVI.

Or z a un argument $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ solution de cette même équation donc $\theta = x_0$.

Ex 2.30

Exprimer $1 + i$ et $1 - i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique.

Démonstration : $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Attention 2.31

Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ sous forme trigonométrique.

z a une infinité de formes trigonométriques : $re^{i(\theta + 2k\pi)}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 2.32

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $z = |z|e^{i\theta}$.

Le réel $\arg(z)$= θ est appelé **argument principal de z**.

Démonstration : Direct de 2.24 et 2.25.

Ex 2.33

Déterminer l'argument principal de $z_1 = \pi \exp\left(\frac{53i\pi}{9}\right)$, de $z_2 = \ln(2)\exp\left(\frac{-54i\pi}{7}\right)$ et de $z_3 = \sin(4)\exp\left(\frac{-40i\pi}{11}\right)$.

Démonstration : $53 \equiv -1\ \ [18]$ et $\pi > 0$ donc $\boxed{\arg(z_1) = -\dfrac{\pi}{9}}$; $-54 \equiv 2\ \ [14]$ et $\ln(2) > 0$ donc $\boxed{\arg(z_2) = \dfrac{2\pi}{7}}$;

Attention $z_3 = |\sin(4)|e^{i\pi}\exp\left(\frac{-40i\pi}{11}\right)$, $|\sin(4)| > 0$ et $-29 \equiv -7\ \ [22]$ donc $\boxed{\arg(z_3) = \dfrac{-7\pi}{11}}$.

Proposition 2.34 :

Pour tout $z, s \in \mathbb{C}^*$ on a : $\boxed{\arg(zs) \equiv \arg(z) + \arg(s)\ \ [2\pi]}$ et $\arg\left(\dfrac{z}{s}\right) \equiv \arg(z) - \arg(s)\ \ [2\pi]$.

---

d) Polynômes

On considère $\Bbbk \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ et on pose $X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z \end{array} \right.$ que l'on appellera **indéterminée**.

Définition 2.35

On dit que P est un **polynôme à coefficient dans** $\mathbb{k}$ s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{k}^{n+1}$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Lorsque $P \neq 0$, on appelle **degré** de P l'entier $\mathbf{deg}(P) = \max\{k \in [\![0, n]\!],\ a_k \neq 0\}$.

On note $\mathbb{k}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{k}$.

Exemple : $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ et $X^2 + iX - 1 \in \mathbb{C}[X]$.

Définition 2.36 : Racine

Soit $P \in \mathbb{k}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{k}$. On dit que λ est **racine** de P si $P(\lambda) = 0$.

Théorème 2.37 : Caractérisation algébrique des racines

Soit $P \in \mathbb{k}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{k}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. λ est une racine de P.
2. Il existe $Q \in \mathbb{k}[X]$ tel que $P = (X - \lambda)Q$.

Démonstration : • $\Longrightarrow$: $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $0 = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ donc en soustrayant $P = \sum_{k=0}^{n} a_k (X^k - \lambda^k) = (X - \lambda) \sum_{k=1}^{n} a_k Q_k$ où $Q_k = \sum_{i=0}^{k-1} X^i \lambda^{k-1-i} \in \mathbb{k}[X]$. • $\Longleftarrow$: $P(\lambda) = (\lambda - \lambda)Q(\lambda) = 0$.

En pratique 2.38

Soit $P \in \mathbb{k}[X]$ **non nul** et $\lambda \in \mathbb{k}$ une racine de P.

Il existe $Q \in \mathbb{k}[X]$ de degré $\deg(P) - 1$ tel que $P = (X - \lambda)Q$.

Démonstration : Cf. démo précédente.

> Remarque : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ et $P = \alpha \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$.
>
> L'ensemble des racines (complexes) de P est $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

En pratique 2.39

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{k}$ avec $ad \neq 0$ et $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

Si λ est racine de P alors $P = (X - \lambda)\left(aX^2 + zX - \frac{d}{\lambda}\right)$ où $z \in \mathbb{k}$ vérifie $z - a\lambda = b$.

Démonstration : Compter les X^2.

> Remarque : Résultat qui n'est pas à connaitre par cœur mais à savoir retrouver en quelques centièmes de secondes.

Ex 2.40

Trouver une racine évidente λ de $X^3 + X + 10$ puis factoriser ce polynôme par $X - \lambda$.

Démonstration : Racine $\lambda = -2$ puis $(X^3 + X + 10) = (X + 2)(X^2 + \alpha X + 5)$ où $\alpha + 2 = 0$ soit $\alpha = -2$.

II. Équations linéaires

On considère $\Bbbk \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

a) Une inconnue

Proposition 2.41

Soit $(a,b,c) \in \Bbbk^3$ avec $a \neq 0$.

L'équation $az+b=c$ d'inconnue $z \in \Bbbk$ a pour unique solution ....

> Remarque : Qu'en est-il lorsque $a=0$?

Définition 2.42

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Bbbk^{\mathbb{N}}$ est **arithmético-géométrique** s'il existe $(a,b) \in \Bbbk^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

> Remarque : Si $a=1$, la suite est ...
> Si $b=0$, la suite est ...

En pratique 2.43

Soit $(a,b) \in \Bbbk^2$ avec $a \neq 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Bbbk^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$.

En notant ω la solution de l'équation $x = ax+b$ d'inconnue $x \in \Bbbk$: la suite $(u_n - \omega)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.

Ex 2.44

On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n^2+2}$.

Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration : $u_n > 0$, $x = 3x+2 \iff x = -1$ donc $u_n^2 + 1 = 3^n(1^2+1)$ puis $\boxed{u_n = \sqrt{2.3^n - 1}}$.

b) Deux inconnues

Pour $u \in \Bbbk^2$, on note $\Bbbk u = \{tu, t \in \Bbbk\}$. En particulier pour tout $(x,y) \in \Bbbk^2$, $\Bbbk(x,y) = \{(tx,ty), t \in \Bbbk\}$.

Ex 2.45

Montrer que pour tout $u \in \Bbbk^2$ et $t \in \Bbbk^*$, $\Bbbk u = \Bbbk tu$.

Définition 2.46

On dit que $\mathcal{E} \subset \Bbbk^2$ est :

1. un **point** s'il existe $M_0 = (x_0, y_0) \in \Bbbk^2$ tel que $\mathcal{E} = \{(x_0, y_0)\}$.
2. une **droite affine** s'il existe $M_0 = (x_0, y_0) \in \Bbbk^2$ et $u = (\alpha, \beta) \in \Bbbk^2$ avec u **non nul** tels que

$$\mathcal{E} = M_0 + \Bbbk u = \{(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta), t \in \Bbbk\}$$

   On dit que $\mathcal{E}$ est la **droite passant par M_0, dirigée par u**.
3. le **plan** si $\mathcal{E} = \Bbbk^2$.

> Remarque : On dira alors que $\mathcal{E}$ est un **espace affine**.
> Décrire l'espace affine $\mathcal{E}$ c'est l'écrire sous une des formes données par 2.46.

Proposition 2.47

Soit $(a, b, c) \in \Bbbk^3$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
L'ensemble $\mathscr{S} = \{(x, y) \in \Bbbk^2,\ ax + by = c\}$ est une droite affine dirigée par $(-b, a)$.

Démonstration : Pour (x, y) : si $a \neq 0$, $(x, y) \in \mathscr{S} \iff x = \frac{c-by}{a} \iff (x, y) = (\frac{c-by}{a}, y) = (\frac{c}{a}, 0) + \frac{y}{a}(-b, a)$ et $\{\frac{y}{a}, y \in \Bbbk\} = \{y, y \in \Bbbk\}$.

Autres cas en

> Remarque : Si $(a, b) = (0, 0)$ alors $\mathscr{S} = \emptyset$ **ou** $\mathscr{S} = \Bbbk^2$.

Définition 2.48

Soit $(a, b, c, d, e, f) \in \Bbbk^6$.

Résoudre, dans $\Bbbk$, le système $\mathcal{S}$: $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ c'est décrire l'espace affine :

$$\mathscr{S} = \{(x, y) \in \Bbbk^2, ax + by = e \text{ et } cx + dy = f\}$$

> Remarque :
> 1. On dit que le système $\mathcal{S}$ est **incompatible** lorsque $\mathscr{S} = \emptyset$.
> 2. Si $\{a, b, c, d\} = \{0\}$ alors $\mathcal{S}$ est incompatible **ou** $\mathscr{S} = \Bbbk^2$.

En pratique 2.49

Les opérations élémentaires suivantes sur les lignes permettent d'obtenir un système équivalent :

1. **Permuter** : intervertir deux lignes.
2. **Dilater** : multiplier une ligne par un élément **non nul** de $\Bbbk$.
3. **Transposer** : ajouter à une ligne un multiple (par un élément de $\Bbbk$) d'une **autre ligne**.

> Remarque : En général on effectue, en une étape, une dilatation et une transposition (ce qui limite le nombre de fractions dans les calculs) : on multiplie la ligne par un élément de $\Bbbk^*$ et on lui ajoute un multiple d'une autre ligne.

Ex 2.50

Résoudre les systèmes suivants :

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + 4y = -7 \end{cases}, \ \mathcal{S}_2 : \begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 4y = -7 \end{cases} \ \text{et } \mathcal{S}_3 : \begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases}.$$

Démonstration : $\mathcal{S}_1$ unique solution et $\mathscr{S}_1 = \{(\frac{1}{4}, -\frac{15}{8})\}$, $\mathscr{S}_1 = \emptyset$ et $\mathscr{S}_3 = (4,0) + \mathbb{R}(2,1)$.

Théorème 2.51

Soit $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{k}^6$ tels que $(a,b) \neq (0,0)$ et $(c,d) \neq (0,0)$.

On considère le système $\mathcal{S} : \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ dont $\mathscr{S} \subset \mathbb{k}^2$ est l'ensemble des solutions.

1. Si le **déterminant du système** $ad - bc \neq 0$ alors $\mathscr{S}$ est un point.
2. Si $ad - bc = 0$ alors $\mathcal{S}$ est incompatible **ou** $\mathscr{S}$ est une droite affine.

Démonstration :

1. Si $a \neq 0$: $\mathcal{S} \underset{L_2 \leftarrow aL_2 - cL_1}{\iff} \begin{cases} ax + by = e \\ (ad - bc)y = af - ce \end{cases}$ et on a bien un unique (x,y) solution.

   Sinon $b \neq 0$ et on s'occupe d'éliminer y dans la seconde ligne.
2. plus naturel avec l'algèbre linéaire.

> Remarque : Ainsi l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ peut : être vide, être un point ou être une droite (et donc infini).
>
> Ce qui est cohérent puisque cela correspond à l'intersection de deux droites affines.

---

c) Trois inconnues

Définition 2.52

On dit que $u \in \mathbb{k}^3$ et $v \in \mathbb{k}^3$ sont **colinéaires** si : $u \in \mathbb{k}v$ ou $v \in \mathbb{k}u$.

Exemple : $(0,0,0)$ et $(1, -i, \sqrt{2})$ ...

$(1,2,-1)$ et $(2,4,-3)$ ...

$(1,2i,-1)$ et $(i,-2,-i)$ ...

Définition 2.53

On dit que $\mathcal{E} \subset \Bbbk^3$ est :

1. un **point** s'il existe $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Bbbk^3$ tel que $\mathcal{E} = \{(x_0, y_0, z_0)\}$.
2. une **droite affine** s'il existe $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Bbbk^3$ et $u = (\alpha, \beta, \gamma) \in \Bbbk^3$ avec u non nul tels que
$$\mathcal{E} = M_0 + \Bbbk u = \{(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta, z_0 + t\gamma), t \in \Bbbk\}$$
On dit que $\mathcal{E}$ est la **droite passant par M_0 et dirigée par u**.
3. un **plan affine** s'il existe $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Bbbk^3$, $u = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in \Bbbk^3$ et $v = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \in \Bbbk^3$ avec u et v non colinéaires tels que
$$\mathcal{E} = M_0 + \Bbbk u + \Bbbk v = \{(x_0 + s\alpha_1 + t\alpha_2, y_0 + s\beta_1 + t\beta_2, z_0 + s\gamma_1 + t\gamma_2), (s,t) \in \Bbbk^2\}$$
On dit que $\mathcal{E}$ est le **plan passant par M_0, de direction engendrée par u et v**.
4. l'**espace** si $\mathcal{E} = \Bbbk^3$.

Proposition 2.54

Soit $(a, b, c, d) \in \Bbbk^4$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
L'ensemble $\mathscr{S} = \{(x, y, z) \in \Bbbk^3,\ ax + by + cz = d\}$ est un plan affine.

Démonstration : Pour (x, y, z) : si $a \neq 0$,
$(x, y, z) \in \mathscr{S} \iff x = \frac{d-by-cz}{a} \iff (x, y, z) = (\frac{d-by-cz}{a}, y, z) = (\frac{d}{a}, 0, 0) + \frac{y}{a}(-b, a, 0) + \frac{z}{a}(-c, 0, a)$.

On a bien $(-b, a, 0)$ et $(-c, 0, a)$ non colinéaire. Autres cas en

> Remarque : Si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ alors $\mathscr{S} = \emptyset$ **ou** $\mathscr{S} = \Bbbk^3$.

Définition 2.55

Soit $(a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n) \in \Bbbk^{12}$.

Résoudre, dans $\Bbbk$, le système $\mathcal{S}$: $\begin{cases} ax + by + cz = l \\ dx + ey + fz = m \\ gx + hy + kz = n \end{cases}$ c'est décrire l'espace affine :
$$\mathscr{S} = \{(x, y, z) \in \Bbbk^3, ax + by + cz = l,\ dx + ey + fz = m \text{ et } gx + hy + kz = n\}$$

> Remarque :
> 1. On dit que le système $\mathcal{S}$ est **incompatible** lorsque $\mathscr{S} = \emptyset$.
> 2. Si $\{a, b, c, d, e, f, g, h, k\} = \{0\}$ alors $\mathcal{S}$ est incompatible **ou** $\mathscr{S} = \Bbbk^3$.
> 3. Si $(0, 0, 0) \notin \{(a, b, c), (d, e, f), (g, h, k)\}$, l'ensemble $\mathscr{S}$ peut être : vide, un point, une droite ou un plan affine.
> Ce qui est cohérent puisque cela correspond à l'intersection de plans affines.

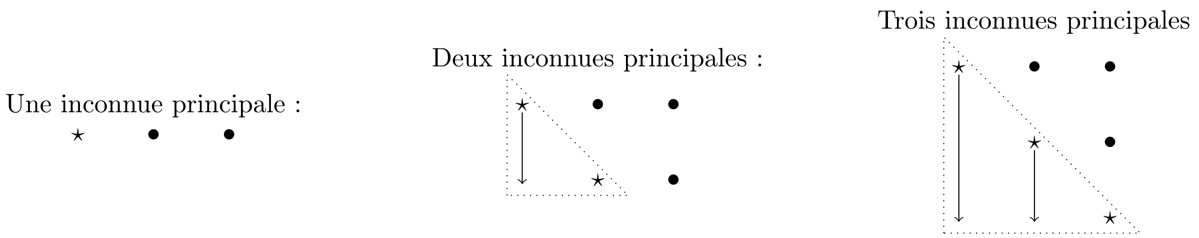
En pratique 2.56

Les opérations élémentaires suivantes sur les lignes permettent d'obtenir un système équivalent :

1. **Permuter** : intervertir deux lignes.
2. **Dilater** : multiplier une ligne par un élément **non nul** de $\mathbb{k}$.
3. **Transposer** : ajouter à une ligne un multiple (par un élément de $\mathbb{k}$) d'une **autre ligne**.

> Remarque : En général on effectue, en une étape, une dilatation et une transposition (ce qui limite le nombre de fractions dans les calculs) : on multiplie la ligne par un élément de $\mathbb{k}^*$ et on lui ajoute un multiple d'une autre ligne.

Illustration de l'algorithme du pivot de Gauss :



Ex 2.57

Résoudre les systèmes $\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-z=-3 \\ x+6y-2z=-9 \end{cases}$, $\mathcal{S}_2 : \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-z=-3 \\ 4x+5y+z=1 \end{cases}$ et $\mathcal{S}_3 : x+y+z=2$.

Démonstration : $\mathscr{S}_1=\{(1,-1,2)\}$, $\mathscr{S}_2=(9,-7,0)+\mathbb{R}(-4,3,1)$ et $\mathscr{S}_3=(2,0,0)+\mathbb{R}(-1,1,0)+\mathbb{R}(-1,0,1)$ où $(-1,1,0)$ et $(-1,0,1)$ ne sont pas colinéaires.

III. Second degré

a) Équation $z^2 = s$

Proposition 2.58

Soit $s \in \mathbb{C}$ et $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = s$.

L'ensemble des solutions de l'équations $z^2 = s$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ est $\{\delta, -\delta\}$.

Démonstration : $X^2 - s = X^2 - \delta^2 = (X - \delta)(X + \delta)$.

> Remarque : Soit $z \in \mathbb{C}$. On a quelques cas particuliers triviaux :
>
> 1. Si $s \in \mathbb{R}^+$: $z^2 = s \iff z = \pm\sqrt{s}$.
> 2. Si $s \in \mathbb{R}^-$: $z^2 = s \iff z = \pm i\sqrt{-s}$.
> 3. Plus généralement si $s = re^{i\theta}$ est sous forme trigonométrique : $z^2 = s \iff z = \pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

En pratique 2.59

Soit $s = a + ib$ et $z = x + iy$ complexes sous forme algébrique avec $b \neq 0$. On a :

$$z^2 = s \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn}(b) \end{cases}$$

Démonstration : $z^2 = s \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z^2) = a \\ |z|^2 = |s| \\ \operatorname{Im}(z^2) = b \end{cases}$ d'où le résultat car si $\begin{cases} \operatorname{Re}(z^2) = a \\ |z|^2 = |s| \\ \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(z^2)) = \operatorname{sgn}(b) \end{cases}$

alors $|\operatorname{Im}(z^2)| = \sqrt{|z^2|^2 - \operatorname{Re}(z^2)^2} = \sqrt{|s|^2 - a^2} = |b|$ et $\operatorname{Im}(z^2) = b$.

> Remarque : On ne retiendra pas le résultat mais **la méthode**.

Ex 2.60

Résoudre l'équation $z^2 = 1 + 3i$.

Démonstration : $z = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{10}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{10}-1}{2}}\right)$.

b) Équation $az^2 + bz + c = 0$

Définition 2.61 : Discriminant

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$.

Le **discriminant** du polynôme $aX^2 + bX + c$ est le complexe $\Delta = b^2 - 4ac$.

Théorème 2.62 : Racines et factorisation d'un trinôme

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$ et $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

1. Si $\Delta \neq 0$, le polynôme $aX^2 + bX + c$ a deux racines distinctes : $r_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $r_2 \dfrac{-b+\delta}{2a}$.

   On a alors la factorisation $aX^2 + bX + c = a(X - r_1)(X - r_2)$.

2. Si $\Delta = 0$, le polynôme $aX^2 + bX + c$ a une unique racine (double) : $r = \dfrac{-b}{2a}$.

   On a alors la factorisation $aX^2 + bX + c = a(X - r)^2$.

Démonstration : $aX^2 + bX + c = a\left(X + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + c - \dfrac{b^2}{4a} = a\left[\left(X + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\delta^2}{4a^2}\right]$ puis identité remarquable.

Ex 2.63

Factoriser au maximum, dans $\mathbb{C}[X]$, le polynôme $X^3 + X + 10$.

Démonstration : On a vu que $X^3 + X + 10 = (X+2)(X^2 - 2X + 5)$ et

$X^2 - 2X + 5$ a pour discriminant $\Delta = -16 = (4i)^2$ donc $X^2 - 2X + 5$ a pour racines $1 \pm 2i$: $X^3 + X + 10 = (X+2)(X-1-2i)(X-1+2i)$.

> Remarque : Un polynôme de degré 2 **unitaire** s'écrit toujours sous la forme
>
> $X^2 - \Sigma X + \Pi$ où Σ est la somme des racines et Π le produit des racines.
>
> On parle de **relations coefficients-racines**.

Exemple : 1 est racine de $X^2 - 4X + 3$ donc l'autre est ...

Ex 2.64

Déterminer l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -1 \end{cases}$.

Démonstration : (x,y) solution ssi $(X - x)(X - y) = X^2 - X - 1$.

Ainsi $(\varphi, \widehat{\varphi})$ et $(\widehat{\varphi}, \varphi)$ où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **nombre d'or** et $\widehat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Lemme 2.65

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.

Proposition 2.66

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si $a \in \mathbb{C}$ est racine de P alors $\overline{a}$ est également racine de P.

Attention 2.67

i est racine de $X^2 + iX + 2$ mais $\overline{i} = -i$ ne l'est pas.

Exemple : Sachant que $2i - 1$ est racine de $P = 3X^2 + 6X - 15$, on a la factorisation $P = \ldots$.

Démonstration : $P = 3(X - 2i + 1)(X + 2i + 1)$ car $-2i - 1$ est l'autre racine.

c) Suite récurrente linéaire d'ordre 2

Définition 2.68

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Lemme 2.69 :

Soit $a, b \in \mathbb{C}$ et $R_{a,b} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$.

Pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R_{a,b}$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n \iff u_0 = v_0 \text{ et } u_1 = v_1$$

Démonstration : Récurrence double.

Théorème 2.70 : Cas complexe

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $(a,b) \neq (0,0)$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

1. Si $X^2 - aX - b$ a deux racines distinctes r_1 et r_2, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
2. Si $X^2 - aX - b$ a une racine double r, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n)r^n$.

Théorème 2.71 : Cas réel

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a,b) \neq (0,0)$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

On note Δ le discriminant de $P = X^2 - aX - b$.

1. Si $\Delta > 0$, en notant r_1 et r_2 les racines de P, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
2. Si $\Delta = 0$, en notant r la racine de P, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n)r^n$.
3. Si $\Delta < 0$, en notant $re^{i\theta}$ une racine de P sous forme trigonométrique, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))r^n$$

Démonstration :

1. $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ puis $u_n = \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\lambda)r_1^n + \mathrm{Re}(\mu)r_2^n$.
2. $u_n = (\lambda + \mu n)r^n$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ puis $u_n = \mathrm{Re}(u_n) = (\mathrm{Re}(\lambda) + \mathrm{Re}(\mu)n)r^n$.
3. L'autre racine est $re^{-i\theta}$ donc $u_n = \lambda r^n e^{in\theta} + \mu r^n e^{-in\theta}$ puis $u_n = \mathrm{Re}(u_n) = (\mathrm{Re}(\lambda) + \mathrm{Re}(\mu))r^n \cos(n\theta) + (\mathrm{Im}(\mu) - \mathrm{Im}(\lambda))r^n \sin(n\theta)$.

Ex 2.72

On considère la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n en fonction du nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Démonstration : $X^2 - X - 1$ a pour racines φ et $\psi = 1 - \varphi$. On a $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda\varphi + \mu\psi = 1 \end{cases}$ donc $\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (1-\varphi)^n)}$.

IV. Racines de l'unité

a) Groupe $\mathbb{U}_n$

Définition 2.73

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine nième de l'unité** tout nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$.

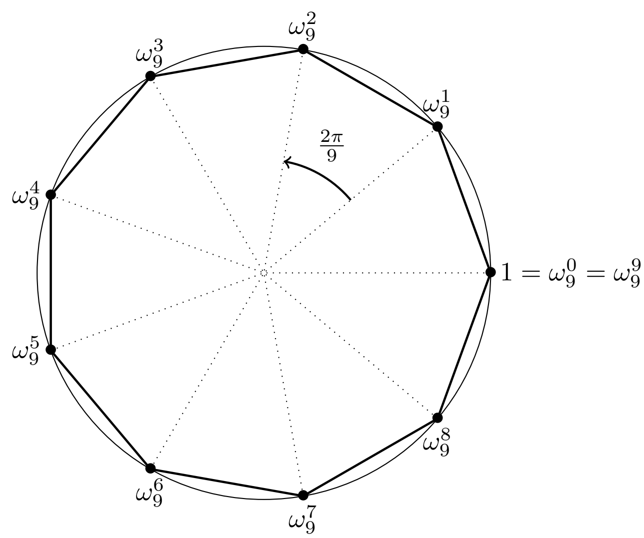
On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines nièmes de l'unité.

> Remarque : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$.

Théorème 2.74 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\mathbb{U}_n| = n$ et $\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.

> Remarque : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
>
> On a $\mathbb{U}_n = \{\omega_n^0, \omega_n^1, \dots, \omega_n^{n-1}\}$ et même :
>
> $$\forall p \in \mathbb{Z},\ \mathbb{U}_n = \{\omega_n^k, k \in [\![p, p+n-1]\!]\}$$



En pratique 2.75

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$: $\boxed{\omega_n^a = \omega_n^b \iff a \equiv b\ [n]}$.

Ex 2.76

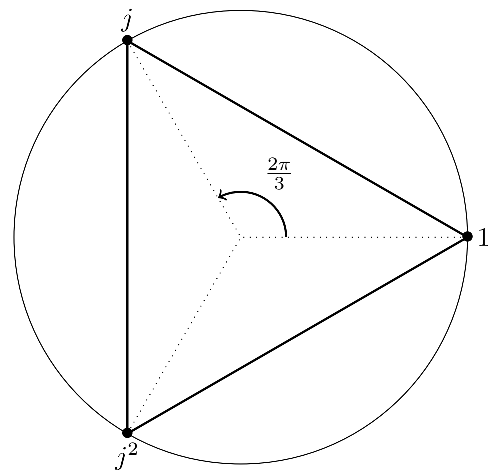
Pour tout entier $n \geqslant 2$, calculer $\displaystyle\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta$ et $\displaystyle\prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta$.

Démonstration : $\displaystyle\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta = \boxed{0}$ car $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$ et $P = e^{\frac{2i\pi}{n} S}$ où $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$ donc $P = e^{i\pi(n-1)} = \boxed{(-1)^{n-1}}$.

Définition 2.77

On pose $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

> Remarque : On a $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$
> donc $1 + j + j^2 = \dots$ et $j^3 = \dots$.
>
> $\boxed{j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } j^2 = \bar{j}}$.



---

b) Équation $z^n = s$

Proposition 2.78

Soit $s \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et δ tel que $\delta^n = s$.

L'ensemble des solutions de l'équation $z^n = s$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ est $\{\zeta\delta, \zeta \in \mathbb{U}_n\}$ de cardinal n.

> Remarque :
>
> 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $z^n = 0$ n'a qu'une solution : 0.
> 2. On retrouve le résultat énoncé pour l'équation $z^2 = s$ car $\mathbb{U}_2 = \dots$.
> 3. Si $s = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ est sous forme trigonométrique, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\boxed{z^n = s \iff z \in \{\zeta \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}},\ \zeta \in \mathbb{U}_n\}}$.

Ex 2.79

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre les équations $z^n = -1$ et $z^n = 1 + i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Démonstration : $\mathscr{S}_1 = \left\{ e^{\frac{i\pi}{n}}\omega,\ \omega \in \mathbb{U}_n \right\}$ car $-1 = e^{i\pi}$ sous forme trigonométrique.

$\mathscr{S}_2 = \left\{ \sqrt[2n]{2} e^{i\frac{\pi}{4n}}\omega,\ \omega \in \mathbb{U}_n \right\}$ car $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ sous forme trigonométrique.

Exemple : $\{z \in \mathbb{C},\ z^3 = -1\} = \{-1,\ e^{i\frac{\pi}{3}},\ e^{-i\frac{\pi}{3}}\}$.